非心分布の近似について

AUTHOR(S):

鳥越, 規央

数理解析研究所講究録
916 巻 1995 年 40-51

非心分布の近似について

鳥越　規央 (筑波大・数学)

1. はじめに

非心分布のパーセント点の近似式については、いろいろな観点から論じられている ([AA90], [B93], [CR87], [G90], [JK70], [M86], [Sh81], [WG93], [Y72])。最近、非心 t 分布の近似式がカイ統計量と標準正規統計量の線形結合による統計量の分布の Cornish-Fisher 展開を用いて導出され、従来の近似式より良いことも示されている ([A93], [AST94])。

本論では自由度 ν 、非心度 ξ の非心カイ 2 乗分布 $\chi^2(\nu,\xi)$ と自由度 (ν_1,ν_2)、非心度 λ の非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2,\lambda)$ の近似について考察する。一般に非心 F 分布は分散分析における F 検定の検出力を求めるときなどに用いられ、また非心カイ 2 乗分布は非心 F 分布の極限として考えることもできるが、カイ 2 乗適合度検定、その他の離散分布に関する仮説検定の検定統計量の対立仮説の下での漸近分布としても現われる。従って任意の自由度、非心度についての検出力を求めたり、非心度についての検定や信頼区間を求めるときにパーセント点が重要になる。しかし、非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu,\xi)$ や非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2,\lambda)$ の密度関数は

$$p_{\chi^2}(x;\nu,\xi):=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{\xi}{2}}\frac{1}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2\frac{2^{-(\nu+2k)/2}}{\Gamma(k+\nu/2)}x^{(\nu+2k)/2-1}e^{-x/2}\qquad(0<x<\infty),$$

$$\begin{aligned}p_F(x;\nu_1,\nu_2,\lambda):=&\frac{e^{-\lambda/2}\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{B(\nu_1/2,\nu_2/2)}x^{\nu_1/2-1}(\nu_2+\nu_1x)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}\\&\times\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda\nu_1x}{2(\nu_2+\nu_1x)}\right\}^2\left(\frac{1}{k!}\right)\frac{B(\nu_1/2,\nu_2/2)}{B(\nu_1/2+k,\nu_2/2)}\qquad(0<x<\infty),\end{aligned}$$

と複雑で、その積分、つまり分布関数は不完全ベータ関数比を用いた形となり、パーセント点等を具体的に求めるためには、大規模な数値計算を必要とする。また統計数値表も利用できるが、複数のパラメータをもつために、それもかなり限定される ([Y72])。以下の節では従来の近似式の考え方を踏まえて ([Sh81])、[A93] と類似の方法を用いてカイ統計量の分布の Cornish-Fisher 展開から新しい近似式を求め、従来の近似式と比較検討する。

2. 非心カイ 2 乗分布のパーセント点の近似式

まず従来の非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu,\xi)$ の上側 100α パーセント点 $\chi^2(\alpha;\nu,\xi)$ の近似式の中で次の (2.1) ~ (2.3) がよく用いられてきた ([Sh81])。

(2.1) $\qquad \chi^2(\alpha;\nu,\xi)=(\nu+\xi)(\mu+\sigma u_\alpha)^{1/h} \qquad$ (Sankaran の近似式 [Sa63]).

但し、u_αは標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 100αパーセント点、

$$h = 1 - \frac{2}{3}\frac{(\nu+\xi)(\nu+3\xi)}{(\nu+2\xi)^2},$$

$$\mu = 1 + h(h-1)\frac{(\nu+2\xi)}{(\nu+\xi)^2} + h(h-1)(h-2)(1-3h)\frac{(\nu+2\xi)^2}{2(\nu+\xi)^4},$$

$$\sigma = \sqrt{h^2\frac{2(\nu+2\xi)}{(\nu+\xi)^2} + h^2(h-1)(1-3h)\frac{2(\nu+2\xi)^2}{(\nu+\xi)^4}}$$

とする。

(2.2) $$\chi^2(\alpha;\nu,\xi) = c_1\chi^2(\alpha;m) \qquad \text{(Patnaik の近似式 [Pa49]).}$$

但し、

$$c_1 = \frac{\nu+2\xi}{\nu+\xi}, \qquad m = \frac{(\nu+\xi)^2}{(\nu+2\xi)}$$

とする。

(2.3) $$\chi^2(\alpha;\nu,\xi) = c_2\chi^2(\alpha;n) + b \qquad \text{(Pearson の近似式 [Pe59]).}$$

但し、

$$b = -\frac{\xi^2}{(\nu+3\xi)}, \qquad c_2 = \frac{(\nu+3\xi)}{(\nu+2\xi)} \qquad n = \frac{(\nu+2\xi)^3}{(\nu+3\xi)^2}$$

とする。

上の (2.1) は Wilson-Hilferty の近似式の拡張に相当する近似式である。非心カイ2乗分布 $\chi^2(\nu,\xi)$ に従う確率変数を$\chi^2_{\nu,\xi}$とし、自由度mの中心カイ2乗分布$\chi^2(m)$ に従う確率変数をχ^2_mとすると、(2.2) は$\chi^2_{\nu,\xi}/c_1$の分布をχ^2_mの分布で近似することに対応するもので、c_1, mは$\chi^2_{\nu,\xi}/c_1$と χ^2_mの1次、2次キュムラントを等置することにより定められている。さらに、$(\chi^2_{\nu,\xi} - b)/c_2$の分布を$\chi^2_n$の分布で近似すれば (2.3) が得られ、3次までのキュムラントを等置して b, c_2, n が求められる。このとき$\chi^2(\alpha;\nu)$ を中心カイ2乗分布 $\chi^2(\nu)$ の上側 100αパーセント点とすると、これは Cornish-Fisher 展開により次式で近似される。

$$\begin{aligned}\chi^2(\alpha;\nu) =& \nu + \sqrt{2\nu}u_\alpha + \frac{2}{3}(u_\alpha^2 - 1) + \frac{1}{9\sqrt{2\nu}}(u_\alpha^3 - 7u_\alpha) \\ & - \frac{2}{405\nu}(3u_\alpha^4 + 7u_\alpha^2 - 16) + o\Big(\frac{1}{\nu}\Big).\end{aligned}$$

次に (2.3) より、カイ統計量の分布の Cornish-Fisher 展開を用いて新しい近似式を考える。

$\chi^2(\alpha;\nu,\xi)$ を$\chi^2(\nu,\xi)$ の上側 100αパーセント点とすると近似式 (2.3) から、十分大きなνに対して

(2.4) $$\begin{aligned}1-\alpha &\approx P\{\chi^2_{\nu,\xi} < \chi^2(\alpha;\nu,\xi)\} \\ &= P\Big\{\frac{\chi^2_{\nu,\xi} - b}{c_2} < \frac{\chi^2(\alpha;\nu,\xi) - b}{c_2}\Big\}\end{aligned}$$

になる。ここで $x_\alpha = (\chi^2(\alpha;\nu,\xi)-b)/c_2$ とし、$X=(\chi^2_{\nu,\xi}-b)/c_2$ とすると X は漸近的に χ^2_n に等しい。そこで (2.4) の両辺の平方根をとり、$S_n=\sqrt{X/n}$ とおくと、

$$b_n := E[S_n] = \sqrt{\frac{2}{n}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)/\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)$$
$$V(S_n) = 1-b_n$$

となるので、(2.4) は

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\Big\{S_n < \sqrt{\frac{x_\alpha}{n}}\Big\} \\ &= P\Big\{\frac{S_n-b_n}{\sqrt{1-b_n^2}} < \frac{\sqrt{x_\alpha/n}-b_n}{\sqrt{1-b_n^2}}\Big\} \end{aligned}$$

となるから, Y を

$$Y = \frac{S_n-b_n}{\sqrt{1-b_n^2}} \tag{2.5}$$

によって定義された統計量とすれば $E[Y]=0, V(Y)=1$ となる。そこでこのYの分布に関する Cornish-Fisher 展開を $o(n^{-3})$ の次数まで得るために、まずYのキュムラントを求める。

補題 2.1([A93]). S_n-b_n の 3 次、4 次キュムラントは

$$\kappa_{3,n}(S_n-b_n) = -b_n\Big\{2(1-b_n^2)-\frac{1}{n}\Big\},$$

$$\kappa_{4,n}(S_n-b_n) = (1-b_n^2)\{4-6(1-b_n^2)\}+\frac{4}{n}(1-b_n^2)-\frac{2}{n}$$

である。

証明の概略. $E[S_n]=b_n, E[S_n^2]=1, E[S_n^3]=(1+1/n)b_n$ であるから

$$\begin{aligned} \kappa_{3,n}(S_n-b_n) &= E[(S_n-b_n)^3] \\ &= E[S_n^3]-3b_nE[S_n^2]+3b_n^2E[S_n]-b_n^3 \\ &= -b_n\Big\{2(1-b_n^2)-\frac{1}{n}\Big\} \end{aligned}$$

を得る。また $E[S_n^4]=1+(2/n)$ となるから、上記と同様にして

$$\begin{aligned} \kappa_{4,n}(S_n-b_n) &= E[(S_n-b_n)^4]-3(E[(S_n-b_n)^2])^2 \\ &= \frac{2}{n}(1-2b_n^2)+(1-b_n^2)(1+3b_n^2)-3(1-b_n^2)^2 \\ &= (1-b_n^2)\{4-6(1-b_n^2)\}+\frac{4}{n}(1-b_n^2)-\frac{2}{n} \end{aligned}$$

を得る。 □

補題 2.2([A93]). Yの3次、4次キュムラントは

$$\kappa_{3,n}(Y)=\frac{1}{4(1-b_n^2)^{3/2}}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right\},$$

$$\kappa_{4,n}(Y)=O(n^{-4})$$

である。

証明の概略. Stirling の公式より、

$$\Gamma(n)=\sqrt{2\pi}n^{n-1/2}e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}b_n&=\sqrt{\frac{2}{n}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)/\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\\&=1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}+\frac{5}{128n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}\tag{2.6}$$

となる。またこれより

$$1-b_n^2=\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{16n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\tag{2.7}$$

になる。従って補題 2.1, (2.6), (2.7) より Y の3次キュムラントは

$$\begin{aligned}\kappa_{3,n}(Y)&=\frac{1}{(1-b_n^2)^{3/2}}\kappa_{3,n}[S_n-b_n]\\&=-\frac{b_n}{(1-b_n^2)^{3/2}}\left\{2(1-b_n^2)-\frac{1}{n}\right\}\\&=\frac{1}{4(1-b_n^2)^{3/2}}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right\}\end{aligned}$$

となる。さらに Y の4次キュムラントは補題 2.1,(2.7) より

$$\begin{aligned}\kappa_{4,n}(Y)&=\frac{1}{(1-b_n^2)^2}\kappa_{4,n}[S_n-b_n]\\&=O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

を得る。 □

定理 2.1. 非心カイ2乗分布$\chi^2(\nu,\xi)$の上側 100αパーセント点を$\chi^2(\alpha;\nu,\xi)$とするとき、次の近似式が成り立つ。

$$\chi^2(\alpha;\nu,\xi)=b+c_2n\left\{b_n+u_\alpha\sqrt{1-b_n^2}+\frac{u_\alpha^2-1}{24(1-b_n^2)}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}\Big)+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right\}^2\tag{2.8}$$

証明の概略. (2.5) と補題 2.2 から、Y の分布に関する Cornish-Fisher 展開を用いて

$$\frac{\sqrt{x_\alpha/n}-b_n}{\sqrt{1-b_n^2}} = u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_{3,n}[Y](u_\alpha^2-1) + \frac{1}{24}\kappa_{4,n}[Y](u_\alpha^3-3u_\alpha) + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$
$$= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2-1}{24(1-b_n^2)^{3/2}}\Big\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big\}$$

を得る。ここで $x_\alpha = (\chi^2(\alpha;\nu,\xi)-b)/c_2$ であるから、これを上式に代入し、$\chi^2(\alpha;\nu,\xi)$ について解くと (2.8) を得る。 □

3. 非心 F 分布の近似式

まず [Sh81] に従って、非心 F 分布の既知の近似式について述べる。独立な確率変数 X_1, X_2 の分布をそれぞれ $\chi^2(\nu_1,\lambda), \chi^2(\nu_2)$ とすると

$$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

の分布は非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2,\lambda)$ となる。$X_1 = c_1X'$ とおき X' の分布を中心カイ 2 乗分布 $\chi^2(m)$ で近似したとき、(2.2) より $c_1 = (\nu_1+2\lambda)/(\nu_1+\lambda), m = (\nu_1+\lambda)^2/(\nu_1+2\lambda)$ を得る。このとき、十分大きい ν_1, ν_2 に対し

$$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} \approx \Big(1+\frac{\lambda}{\nu_1}\Big)\frac{X'/m}{X_2/\nu_2}$$

となるから

$$\text{(3.1)} \qquad P\{F_{\nu_1,\nu_2\lambda} > f\} \approx P\Big\{F_{m,\nu_2} > \frac{\nu_1 f}{\nu_1+\lambda}\Big\} \qquad \text{(Patnaik の近似式 [Pa49])}$$

を得る。但し、F_{m,ν_2} は自由度 (m,ν_2) の中心 F 分布 $F(m,\nu_2)$ に従う確率変数とする。また中心 F 分布に対する Paulson の近似式を用いると次の近似式が得られる。十分大きい ν_1, ν_2 に対して

$$\text{(3.2)} \quad P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} > f\} \approx 1-\Phi\Big[\frac{(1-d)z^{1/3}-(1-a)}{\sqrt{a+d^{2/3}}}\Big] \quad \text{(Severo-Zelen の近似式 [SZ60]).}$$

但し

$$z = \frac{\nu_1 f}{\nu_1+\lambda}, \qquad a = \frac{2(\nu_1+2\lambda)}{9(\nu_1+\lambda)^2} \qquad d = \frac{2}{9\nu_2}$$

とする。さらに3次以下のキュムラントを等置することによって $(F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}-\rho)/\gamma$ の分布を $F(\nu^*,\nu_2)$ で近似することができる。これより次の近似式を得る。
十分大きな ν_1,ν_2 に対して

$$P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}>f\}\approx P\left\{F_{\nu^*,\nu_2}>\frac{(f-\rho)}{\gamma}\right\} \qquad \text{(Tiku の近似式 [T65]).} \tag{3.3}$$

但し

$$H=2(\nu_1+\lambda)^3+3(\nu_1+\lambda)(\nu_1+2\lambda)(\nu_2-2)+(\nu_1+3\lambda)(\nu_2-2)^2,$$
$$K=(\nu_1+\lambda)^2+(\nu_1+2\lambda)(\nu_2-2),$$
$$\nu^*=\frac{1}{2}(\nu_2-2)\left(\sqrt{\frac{H^2}{H^2-4K^3}}-1\right),$$
$$\gamma=\frac{\nu^*H}{\nu_1(2\nu^*+\nu_2-2)K},$$
$$\rho=\frac{\nu_2(1+\lambda/\nu_1-\gamma)}{\nu_2-2}$$

とする。

次に (3.3) より [A93] と類似の方法を用いて2つのカイ統計量の線形結合の分布を Cornish - Fisher 展開して、$F(\nu_1,\nu_2,\lambda)$ の上側 100α パーセント点 f_α の近似式を求める。

S を中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu^*)$ に従う確率変数とし、$f'_\alpha=(f_\alpha-\rho)/\gamma$ とすると、近似式 (3.3) より、十分大きな ν_1,ν_2 に対して

$$\begin{aligned}
1-\alpha &\approx P\left\{\frac{S/\nu^*}{X_2/\nu_2}<f'_\alpha\right\}\\
&=P\left\{\sqrt{\frac{S}{\nu^*}}-\sqrt{f'_\alpha}\sqrt{\frac{X_2}{\nu_2}}<0\right\}\\
&=P\left\{\frac{\sqrt{S/\nu^*}-b_{\nu^*}-\sqrt{f'_\alpha}(\sqrt{X_2/\nu_2}-b_{\nu_2})}{\sqrt{(1-b^2_{\nu^*})+f'_\alpha(1-b_{\nu_2})}}>\frac{-b_{\nu^*}+\sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{(1-b^2_{\nu^*})+f'_\alpha(1-b_{\nu_2})}}\right\}
\end{aligned}$$

となるので $S_{\nu^*}=\sqrt{S/\nu^*}$, $S'_{\nu_2}=\sqrt{X_2/\nu_2}$ とし、

$$W=\frac{S_{\nu^*}-b_{\nu^*}-\sqrt{f'_\alpha}(S'_{\nu_2}-b_{\nu_2})}{\sqrt{(1-b^2_{\nu^*})+f'_\alpha(1-b_{\nu_2})}} \tag{3.4}$$

とおくと $E[W]=0, V(W)=1$ となる。そこで前節と同様に、Wのキュムラントを求め W の分布の Cornish-Fisher 展開から非心 F 分布の新しい近似式を導出する。

補題 3.1. W の3次、4次キュムラントは

$$\begin{aligned}
\kappa_3(W)=&\frac{1}{4\{(1-b^2_{\nu^*})+f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\\
&\times\left\{\left(\frac{1}{\nu^{*2}}+\frac{1}{4\nu^{*3}}\right)-f'^{3/2}_\alpha\left(\frac{1}{{\nu_2}^2}+\frac{1}{4{\nu_2}^3}\right)+O\left(\frac{1}{{\nu_2}^4}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\kappa_4[W] = O\Big(\frac{1}{\nu'^4}\Big)$$

である。

証明の概略.　仮定より、$S_{\nu^*} - b_{\nu^*}$ と $S'_{\nu_2} - b_{\nu_2}$ は独立であるので、補題 2.1、補題 2.2 より W の 3 次キュムラントは

$$\begin{aligned}
\kappa_3[W] &= \frac{1}{\{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\kappa_3((S_{\nu^*} - b_{\nu^*}) - \sqrt{f'_\alpha}(S'_{\nu_2} - b_{\nu_2}))\\
&= \frac{1}{\{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\Big\{\kappa_3(S_{\nu^*} - b_{\nu^*}) - f'^{3/2}_\alpha\kappa_3(S'_{\nu_2} - b_{\nu_2})\Big\}\\
&= \frac{1}{\{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\\
&\quad \times\Big\{\Big(\frac{1}{\nu^{*2}} + \frac{1}{4\nu^{*3}}\Big) - f'^{3/2}_\alpha\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2} + \frac{1}{4{\nu_2}^3}\Big) + O\Big(\frac{1}{{\nu_2}^4}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

となる。同様にしてWの 4 次キュムラントは

$$\kappa_4(W) = O\Big(\frac{1}{\nu_2^4}\Big)$$

となる。　□

定理 3.1.　非心F分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda)$ の上側 100α パーセント点を f_α とするとき、次の近似式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
(3.5)\qquad & -\frac{b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})}}\\
&= u_\alpha + \frac{u^2_\alpha - 1}{24\{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\\
&\quad \times\Big\{\Big(\frac{1}{\nu^{*2}} + \frac{1}{\nu^{*3}}\Big) - f'^{3/2}_\alpha\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2} + \frac{1}{{\nu_2}^3}\Big) + O\Big(\frac{1}{{\nu_2}^4}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

但し、$f'_\alpha = (f_\alpha - \rho)/\gamma$ とする。

証明の概略.　(3.4) と補題 3.1 より、Wの分布に関する Cornish-Fisher 展開を用いて、

$$\begin{aligned}
-\frac{b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})}} &= u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_3(W)(u^2_\alpha - 1)\\
&\quad + \frac{1}{24}\kappa_4(W)(u^3_\alpha - 3u_\alpha) + O\Big(\frac{1}{\nu_2}\Big)\\
&= u_\alpha + \frac{u^2_\alpha - 1}{24\{(1-b^2_{\nu^*}) + f'_\alpha(1-b^2_{\nu_2})\}^{3/2}}\\
&\quad \Big\{\Big(\frac{1}{\nu^{*2}} + \frac{1}{\nu^{*3}}\Big) - f'^{3/2}_\alpha\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2} + \frac{1}{{\nu_2}^3}\Big) + O\Big(\frac{1}{{\nu_2}^4}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

を得る。 □

4. 数値計算による比較検討

まず、非心χ^2分布について (2.1) から (2.3)、そして (2.8) の近似式で求めた数値と真値との誤差をαの値が 0.05、νが 2, 5, 10 で、ξが 1.0, 5.0, 10.0, 15.0, 25.0 である場合に表1として示す。ここで真値は [Sh81] に与えられているものである。次に非心F分布について (3.5) と比較するために、近似式 (3.1), (3.2), (3.3) によるパーセント点の近似式を示す。

Patnaik の近似式から導出した式

$$
\text{(4.1)} \qquad f_\alpha \fallingdotseq \frac{b}{\nu_1} + \frac{c_2 n}{\nu_1} + u_\alpha \sqrt{2n\left(\frac{c_2}{\nu_1}\right)^2 + f_\alpha^2 \frac{2}{\nu_2}} + \frac{4}{3}\frac{u_\alpha^2 - 1}{\left\{2n\left(c_2/\nu_1\right)^2 + f_\alpha^2(2/\nu_2)\right\}}\left\{n\left(\frac{c_2}{\nu_1}\right)^3 - \frac{f_\alpha^3}{\nu_2^2}\right\}.
$$

Severo-Zelen の近似式から導出した式

$$
\text{(4.2)} \qquad f_\alpha \fallingdotseq \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_1}\right) \left\{\frac{(1-a)(1-d) + u_\alpha\sqrt{(1-a)^2 d + (1-d)^2 a - adu_\alpha^2}}{(1-d)^2 - du_\alpha^2}\right\}^3
$$

Tiku の近似式から導出した式

$$
\text{(4.3)} \qquad f_\alpha \fallingdotseq \gamma\left\{\frac{(1-a')(1-d) + u_\alpha\sqrt{(1-a')^2 d + (1-d)^2 a' - a'du_\alpha^2}}{(1-d)^2 - du_\alpha^2}\right\}^3 + \rho
$$

但し、$a' = 2/(9\nu^*)$ とする。

これらのパーセント点の近似式 (3.5) と (4.1), (4.2), (4.3) についてν_1が 3, 5, 10, ν_2が 3, 5, 10, 20, 30, 60 である場合に表2として示す。ここで$\sqrt{\lambda/\nu_1}$は [Sh81] より引用した引数である。なお、真値は *Mathematica* により算出した。この表より (3.5) と従来のパーセント点の近似式 (4.1), (4.2), (4.3) を比較するとかなり精度がよいことがわかる。しかし、単にパーセント点を求めるほか、任意の自由度、非心度についてF検定の検出力を求めることも重要である。(3.5) から任意の自由度、非心度についての検出力も求めることができる。表3では検出力についての比較を表2と同様の値で行った。これについてはまだ改良の余地がある。

参考文献

[A93] Akahira, M. (1993). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Mathematical Research Note 93-015,* Institute of Mathematics, University of Tsukuba. To appear in *Commun. Statist.–Simula.,* **24**(3).

[AA90] Ashour, S. K. and Abdel-Samad, A. I. (1990). On the computation of non-central chi-square distribution function. *Commun. Statist.–Simula.,* **19**(4), 1291-1297.

[AST94] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N. (1994). On the new approximation to the non-central t-distributions. *Mathematical Research Note 94-011,* Institute of Mathematics, University of Tsukuba. To appear in *J. Japan Statist. Soc.*, **25**.

[B93] Bagui, S. C. (1993).*CRC Handbook of Percentiles of Non-Central t-Distribution,* CRC Press, Florida.

[CR87] Cox, D. R. and Ried, N. (1987). Approximations to noncentral distributions. *Canadian J. Statist.,* **15**, 105-114.

[G90] Guirguis, G. H. (1990). A note on computing the noncentrality parameter of the noncentral F-distribution. *Commun. Statist.–Simula.,* **19**, 1497-1511.

[JK70] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions-2.* Houghton-mifflin, New York.

[M86] Moon, Y. H. (1986). Computation of percentage points. *Commun. Statist.–Simula.,* **15**, 1191-1198.

[Pa49] Patnaik, P. B. (1949). The non-central χ^2- and F-distributions and their applications. *Biometrika,* **36**, 202-232.

[Pe59] Pearson, E. S. (1959). Note on an approximation to the distribution of non-central χ^2. *Biometrika,* **46**, 364.

[Sa63] Sankaran, M. (1963). Approximations to the non-central chi-square distribution. *Biometrika,* **50**, 199-244.

[Sh81] 柴田義貞. (1981). 正規分布. 東京大学出版会.

[SZ60] Severo, N. and Zelen, M. (1960). Normal approximation to the chi-square and non-central F probability functions. *Biometrika,* **47**, 411-416

[T65] Tiku, M. L. (1965). Laguerre series forms of non-central χ^2 and F distributions. *Biometrika* **52**, 415-427.

[WG93] Wang, S. and Gray, H. L. (1993). Approximating tail probabilities of noncentral distributions. *Computational Statistics & Data Analysis* **15**, 343-352.

[Y72] 山内二郎 他 (1972). 統計数値表. 日本規格協会.

ν	ξ	真値	誤差 (2.8)	誤差 (2.1)	誤差 (2.2)	誤差 (2.3)
2	1.0	8.642	0.01	-0.07	-0.02	-0.05
	5.0	16.383	-0.04	-0.02	0.11	-0.06
	10.0	24.344	-0.04	0.00	0.22	-0.04
	15.0	31.642	-0.03	0.01	0.29	-0.04
	25.0	45.308	-0.02	0.01	0.36	-0.03
5	1.0	13.170	0.00	-0.03	0.00	-0.01
	5.0	20.288	-0.02	-0.02	0.08	-0.03
	10.0	28.026	-0.03	-0.01	0.17	-0.03
	15.0	35.214	-0.02	0.00	0.23	-0.03
	25.0	48.763	-0.02	0.00	0.31	-0.02
10	1.0	20.094	0.00	-0.02	0.00	0.00
	5.0	26.636	-0.01	-0.02	0.05	-0.02
	10.0	34.089	-0.02	-0.02	0.12	-0.02
	15.0	41.123	-0.02	-0.01	0.17	-0.02
	25,0	54.498	-0.01	0.00	0.24	-0.02

表１．非心カイ２乗分布$\chi^2(\nu,\xi)$ の上側５％点

$\sqrt{\frac{\lambda}{\nu_1}}$	ν_1	ν_2	真値	誤差 (3.5)	誤差 (4.1)	誤差 (4.2)	誤差 (4.3)
1	5	3	17.8235	0.465	38.678	1.187	1.234
		5	9.8105	0.061	1.924	0.118	0.138
		10	6.3248	0.001	0.176	0.003	0.006
		20	5.0761	-0.006	0.030	0.000	-0.004
		30	4.7142	-0.006	0.022	0.002	-0.009
		60	4.3754	-0.006	0.027	0.006	-0.010
1	10	3	17.4527	0.442	38.584	1.215	1.234
		5	9.3008	0.058	1.928	0.130	0.138
		10	5.7593	0.005	0.183	0.010	0.011
		20	4.4788	-0.001	0.025	0.003	-0.000
		30	4.1030	-0.001	0.010	0.004	-0.002
		60	3.7476	-0.002	0.008	0.006	-0.003
2	3	3	44.2219	1.130	96.568	2.972	3.146
		5	24.0496	0.152	4.785	5.171	0.359
		10	15.2720	0.011	0.427	0.017	0.025
		20	12.1132	-0.008	0.055	0.021	-0.008
		30	11.1926	-0.010	-0.028	0.032	-0.013
		60	10.3273	-0.011	0.033	0.047	-0.016
$\sqrt{2}$	5	3	26.4595	0.677	57.932	1.797	1.869
		5	14.3345	0.090	2.878	0.183	0.211
		10	9.0639	0.006	0.261	0.012	0.015
		20	7.1679	-0.004	0.035	0.009	-0.004
		30	6.6152	-0.006	0.018	0.013	-0.007
		60	6.0957	-0.006	0.020	0.019	-0.009

表２．非心Ｆ分布 $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側５％点

$\sqrt{\frac{\lambda}{\nu_1}}$	ν_1	ν_2	真値	誤差 (3.5)	誤差 (4.1)	誤差 (4.2)	誤差 (4.3)
1	5	3	0.12203	-0.0012	-0.0002	-0.0010	0.0000
		5	0.16374	-0.0006	-0.0007	-0.0010	0.0000
		10	0.22759	0.0000	-0.0021	-0.0024	0.0000
		20	0.28189	-0.0001	-0.0039	-0.0041	0.0000
		30	0.30530	-0.0004	-0.0048	-0.0051	-0.0001
		60	0.33206	-0.0007	-0.0060	-0.0062	-0.0001
1	10	3	0.12453	-0.0020	-0.0001	0.0008	0.0000
		5	0.17503	-0.0014	-0.0002	-0.0011	0.0001
		10	0.26793	-0.0003	-0.0010	-0.0024	0.0001
		20	0.36505	0.0000	-0.0023	-0.0024	0.0001
		30	0.41253	0.0001	-0.0030	-0.0030	0.0002
		60	0.47091	0.0003	-0.0039	-0.0037	0.0004
2	3	3	0.33217	-0.0026	-0.0004	-0.0029	0.0000
		5	0.49073	-0.0000	-0.0013	-0.0020	0.0002
		10	0.66160	0.0007	-0.0006	0.0000	0.0008
		20	0.75459	0.0016	0.0023	0.0031	0.0015
		30	0.78452	0.0021	0.0038	0.0047	0.0018
		60	0.81321	0.0027	0.0058	0.0067	0.0022
2	5	3	0.34671	-0.0029	-0.0002	-0.0032	0.0000
		5	0.54196	0.0001	-0.0004	-0.0012	0.0000
		10	0.76245	0.0003	0.0012	0.0015	0.0002
		20	0.87275	0.0002	0.0044	0.0045	0.0003
		30	0.90385	0.0002	0.0058	0.0058	0.0002
		60	0.93057	0.0000	0.0071	0.0070	0.0000

表3．中心F分布 $F(\nu_1, \nu_2)$ の5％点における非心F分布 $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側確率